III) Nombres premiers

1) Généralités sur les nombres premiers

Définition.

Un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples.

- 3 est un nombre premier puisqu'il possède deux diviseurs distincts : 1 et 3 (lui-même).
- 18 n'est pas un nombre premier car il possède plus de deux diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18.

Nombres premiers à retenir. 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Remarques.

1. « 1 » n'est pas un nombre premier puisqu'il n'a qu'un seul diviseur.
2. « 0 » n'est pas un nombre premier puisqu'il a une infinité de diviseurs.

2) Décomposition en produits de facteurs premiers

Théorème.

Tout nombre entier non premier peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Exemples.

$$\bullet 15 = 3 \times 5$$

$$\bullet 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Méthode. Décomposer en produits de facteurs premiers. Décomposer 12 en produit de facteurs premiers.

1. On écrit 12 sous la forme d'un produit simple.

$$12 = 2 \times 6$$

2. On fait de même avec chacun des facteurs non premiers jusqu'à obtenir des facteurs premiers.

$$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$$

Remarque. On peut simplifier l'écriture précédente : $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.